Projekt i differentialligninger

Newtons afkølingslov og logistisk vækst

Nedenfor vil der blive refereret til "noten", som I det følgende vil der refereres til tillægget *Differentialligninger - nogle beviser og modeller*.

Opgav 1 (Newtons afkølingslov)

I det følgende antager vi, at *Newtons afkølingslov* kan bruges til at beskrive, hvordan temperaturen af kaffen i en kop aftager over tid. Loven siger følgende:

(1) $$\frac{dT}{dt} = -k \cdot \left(T - T_{omg}\right)$$

hvor T er kaffens temperatur, t er tiden, k er en positiv konstant og T_{omg} er omgivelsernes temperatur.

a) Forklar med ord, hvad differentialligningen (1) udtrykker angående temperaturens udvikling i kaffen. *Hjælp*: Husk at differentialkvotienten er en øjeblikshastighed. Inddrag desuden gerne begrebet *proportionalitet* i formuleringen.

b) Redegør for, hvorfor der er tale om en differentialligning af typen $y' = b - a \cdot y$. *Hjælp*: Hvad svarer y', y, a og b til i (1)?

c) I sætning 2 i tillægget *Differentialligninger - nogle beviser og modeller* er angivet den fuldstændige løsning til differentialligningen $y' = b - a \cdot y$. Brug dette til at vise, at den fuldstændige løsning til (1) er givet ved:

   (2) $$T(t) = T_{omg} + c \cdot e^{-k \cdot t}$$

   hvor c er en arbitrær konstant. Vis desuden, at den (partikulære) løsning, som har begyndelsesbetingelse $T(0) = T_0$ har følgende forskrift:

   (3) $$T(t) = T_{omg} + (T_0 - T_{omg}) \cdot e^{-k \cdot t}$$

d) I en konkret anvendelse er $k = 0{,}035\ \text{min}^{-1}$ og kaffens begyndelsestemperatur er 91°C. Omgivelsernes temperatur er 22°C. Benyt (3) til at bestemme løsningen til differentialligningen med de angivne værdier for k, T_{omg} og T_0. Tiden t er her underforstået at være i minutter.

e) Løs desuden differentialligningsopgaven fra d) direkte i Maple.

f) Plot løsningskurven i området givet ved $0 \le t \le 180$ og $0 \le T \le 100$.

g) Lav i samme område et diagram med linjeelementer indeholdende løsningen fra d). *Hjælp*: Benyt Maple-kommandoen *DEplot*.

h) Bestem (øjebliks-)hastighederne, hvormed temperaturen aftager, til tidspunkterne 5 minutter og 100 minutter. Husk enheder på i konklusionen.

i) Hvilken betydning har konstanten k i forhold til udviklingen af kaffens temperatur? Altså hvad betyder en lille værdi af k i forhold til en større værdi af k?

Opgave 2 (Forsøg med Newtons afkølingslov)

Foretag et forsøg, hvor I måler temperaturen i et krus med vand over en periode på 2 timer. Der bruges et af Verniers Go!Temp termometre. Sørg for, at termometret er fastgjort i et stativ, så opstillingen er stabil. Dataopsamlingen foregår naturligvis med Logger Pro. Vand bringes op på kogepunktet i en elkedel, før det hældes over i et krus eller bæger. Når målingerne påbegyndes, bør vandets temperatur være omkring 90 grader varmt.

- Foretag indstillinger via menuen *Forsøg* > *Dataopstilling* (**Ctrl+D**) således, at der foretages én måling pr. 0.5 minut, og der måles i sammenlagt 120 minutter.
- Husk at sætte computeren til *ikke* at slumre eller slukke automatisk. Sæt også helst et netkabel i, så batteriet ikke går fladt!
- Tag foto af forsøgsopstilling.
- Husk at gemme Logger Pro filen på computeren.

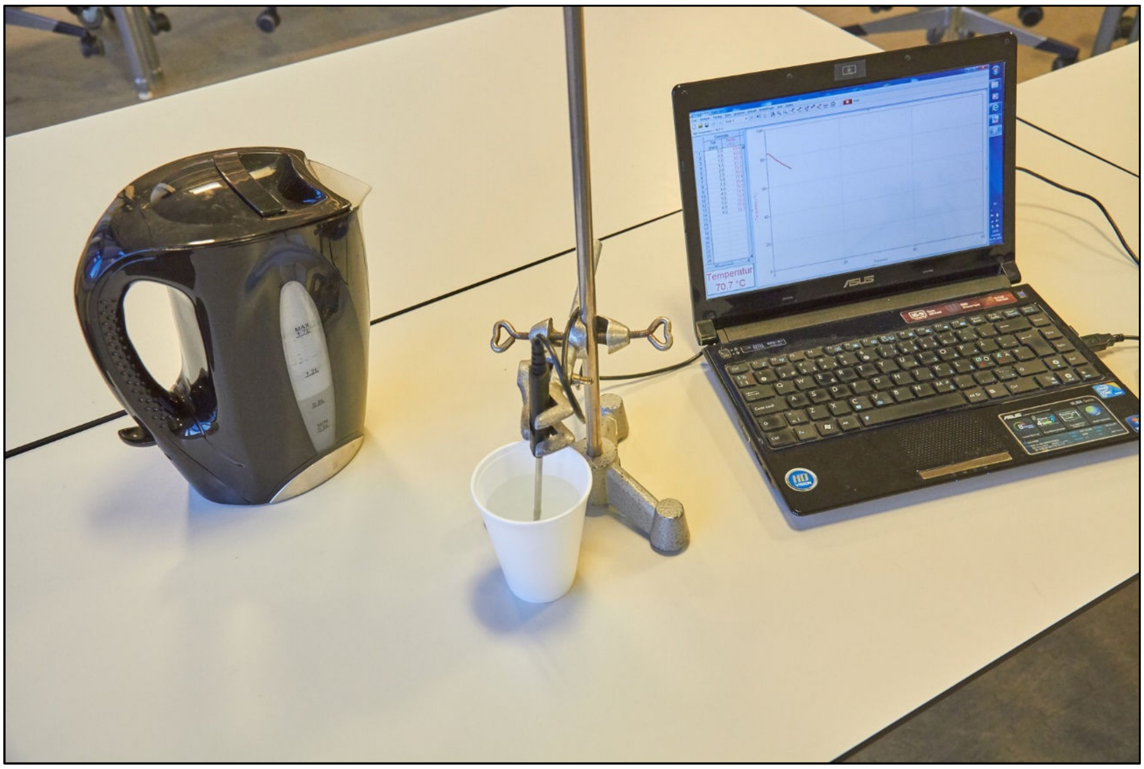
Databehandling

a) Giv en kort forsøgsbeskrivelse og indsæt et foto af forsøgsopstillingen.

b) Foretage et fit med en funktion af den type (3), som er nævnt i opgave 1.

c) Indsæt et tydeligt skærmbillede af datapunkter og fit fra Logger Pro i din besvarelse.

d) Hvor godt passer fittet? Kan du bekræfte Newtons afkølingslov, eller er der *systematiske* afvigelser, som gør, at du må stille spørgsmålstegn ved, om loven holder?



Opgave 3 (Logistisk vækst af alger)

Nedenfor er sammenhørende værdier af tid og biomasse for en algeprøve fra Adriaterhavet. Data er fra afhandlingen af M. Zangrandi fra University of Trieste (1991): *Growth Rate of Algae of Genera Fosliella and Pheophyllum in the Gulf of Trieste*.

Tid (dage)	11	15	18	23	26	31	39	44	54	64	74
Biomasse (mm^2)	0,00476	0,0105	0,0207	0,0619	0,337	0,74	1,7	2,45	3,5	4,5	5,09

a) Vis ved at foretage logistisk regression, at algernes biomasse omtrent udvikler sig logistisk med tiden. Lad $B(t)$ betegne den logistiske model, som er det bedste fit til data. Sørg for at CAS-værktøjet afbilder datapunkterne og regressionskurven i området givet ved $0 \le t \le 100$ og $0 \le y \le 6$, hvor t er tiden i dage og y er *biomassen* regnet i mm^2.

b) Benyt forskriften for den logistiske model $B(t)$ til at bestemme en værdi for *bæreevnen*, dvs. den værdi, som populationen nærmer sig til, når tiden går imod uendelig.

c) Udregn $B'(30)$ og giv en fortolkning af størrelsen.

d) Bestem det tidspunkt, hvor biomassen vokser hurtigst. *Hjælp*: Du kan undgå en funktionsundersøgelse, hvis du bruger sætning 9 i tillægget *Differentialligninger - nogle beviser og modeller*.

Opgave 4

Udviklingen af en population af kaniner på en øde ø kan beskrives ved den logistiske differentialligning:

$$y' = b \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{M}\right) \tag{4}$$

Den variable t (tiden) regnes i måneder. Parametrene er $b = 0{,}329$ og $M = 840$. Det oplyses, at til tidspunktet 0 blev der sat 33 kaniner ud på øen.

a) På et tidspunkt er bestanden af kaniner vokset til 200 kaniner. Bestem den hastighed, hvormed populationen vokser til dette tidspunkt. *Hjælp*: Her behøver man *ikke* først at finde løsningen til (4). Man kan benytte differentialligningen direkte! Gør det.

b) Benyt et CAS-værktøj til at bestemme løsningen $f(t)$ til differentialligningen. Husk begyndelsesbetingelsen! Tegn en graf for $f(t)$ i tidsrummet fra 0 til 30 måneder.

c) Hvornår vil der være 600 kaniner på øen, ifølge modellen?